Vieillissement des populations et système de retraite
Author(s): Jean Bourgeois-Pichat
Source: *Population (French Edition)*, 45e Année, No. 4/5 (Jul. - Oct., 1990), pp. 803-820
Published by: Institut National d'Études Démographiques
Stable URL: http://www.jstor.org/stable/1533288
Accessed: 16/04/2009 21:47

VIEILLISSEMENT DES POPULATIONS ET SYSTÈME DE RETRAITE*

L'équilibre financier des régimes de retraite, lorsqu'une population vieillit ou qu'une profession décline, a été une préoccupation constante dans les travaux de Jean Bourgeois-Pichat. Il y avait déjà un article sur le sujet dans Population *en 1950 et une étude spécifique du corps médical en 1953**. Le mariage avec la théorie des populations stables a donné une orientation originale aux travaux des Nations Unies sur ce point, et Jean Bourgeois-Pichat n'y était pas étranger. On en retrouve des traces sous sa signature dans divers travaux, mais surtout dans deux articles sur le financement des retraites par capitalisation***. Un prolongement vers un système mixte répartition-capitalisation est esquissé ici et sera précisé dans* Nuevas fronteras de la demografia****.

Le système capitaliste, en rémunérant la détention d'un capital, possède un puissant moyen de transfert de revenus entre deux catégories de populations : celle qui dispose d'un capital et celle qui n'en a pas. Si la possession du capital est réservée à certaines générations, par exemple si le capital est possédé par les gens âgés et que les jeunes n'en possèdent pas, il y aura, par l'intermédiaire de l'intérêt versé aux détenteurs de capitaux, un transfert de revenus entre les jeunes et les gens âgés[1]. Dans un article publié dans la revue *Population* en 1978, nous avons examiné s'il était possible, par ce moyen, de financer les retraites[2].

---

* Communication au colloque *Evolution démographique et transferts sociaux,* Liège, 25 novembre 1983.

** «La structure de la population et la sécurité sociale», *Population,* 3, juillet-septembre 1950.
«Etude démographique du corps médical», *La retraite,* juin, octobre et décembre 1953.

*** *Aplicacion de la teoria de las poblaciones estables a un sistema de seguridad social,* San Jose : CELADE, 1971.
«Le financement des retraites par capitalisation», *Population,* 6, novembre-décembre 1978.
«Répartition du revenu national entre capital et travail. Application au financement des systèmes de retraite», *Population,* 1, janvier-février 1979 (avec J.C. Chapron).

**** Santiago de Chile : CELADE, 1986.
Voir aussi D. Blanchet, «Un système de retraite mixte par capitalisation et par répartition permet-il de corriger les effets du vieillissement ?», *Population,* 1, janvier-février 1988.

[1] Le fait que le détenteur d'un capital transmet à ses descendants au moment de son décès une part de ce capital représente, dans l'autre sens, un transfert de revenus entre générations.

[2] *Population,* 1978, pages 1115 à 1136.

Le retraité type n°1 Jusqu'à nos jours le retraité type avait économisé toute sa vie active. Il avait placé ses économies et, la retraite venue, vivait des intérêts que lui procuraient ses placements. S'il n'avait pas assez pour vivre, c'est qu'il avait mal géré sa fortune et la société acceptait bon gré mal gré de corriger ses erreurs. Mais elle maintenait qu'il s'agissait bien d'erreurs. Le «bon citoyen» devait se débrouiller tout seul en utilisant les moyens fournis par le système économique, c'est-à-dire la rémunération du capital.

Et pourtant il n'est pas besoin de grands calculs pour s'apercevoir que ce retraité type ne peut être qu'une exception. Pour le voir, considérons une population stationnaire correspondant à une mortalité faible, de l'ordre de grandeur de celle rencontrée actuellement dans les pays industrialisés. Nous avons fait choix :

a) de 0 à 80 ans, de la table de mortalité féminine de niveau 24 de la Série Ouest des tables de mortalité de Coale et Demeny ;

b) au-delà de 80 ans, la table précédente a été extrapolée graphiquement jusqu'à 100 ans. L'espérance de vie à la naissance de la table ainsi obtenue est égale à 78,0 années. Le tableau 1 représente cette population stationnaire pour 100 000 naissances annuelles.

Dans tout ce qui va suivre, nous adopterons les hypothèses simplificatrices suivantes :

1) L'entrée en activité se fait à 20 ans et la sortie à 65 ans. Toutes les personnes de 20 à 64 ans travaillent et aucune personne de 65 ans et plus ne travaille. Il en résulte, d'après le tableau 1, qu'il y a 4 335 609,0 travailleurs et 1 489 374,4 retraités.

2) Chaque travailleur reçoit une rémunération annuelle S, la même pour tous et les inactifs reçoivent une retraite annuelle S égale au salaire des actifs. La masse salariale est égale à 4 335 609,0 S et le total des retraites est égal à 1 489 374,4 S.

3) Le capital de la population est égal à 5 fois la masse salariale.

Dans ces conditions, si chaque retraité doit pouvoir vivre des intérêts de son capital, il doit posséder une somme K telle que $rK = S$, r étant le taux d'intérêt. Le capital total possédé par les retraités est égal à :

$$C_v = 1\,489\,374{,}4\ K = 1\,489\,374{,}4 \frac{S}{r}$$

Le capital total est égal à :

$$C_t = 4\,335\,609{,}0\ S$$

et on a :

$$\frac{C_v}{C_t} = \frac{1\,489\,374{,}4S}{4\,335\,609{,}0Sr}\ ;$$

pour $r = 0{,}05, \dfrac{C_v}{C_t} = 1{,}38.$

TABLEAU 1. – POPULATION STATIONNAIRE, POUR 100 000 NAISSANCES ANNUELLES CORRESPONDANT :

a) De 0 à 80 ans à la table type de mortalité féminine de la Série Ouest de Coale et Demeny de niveau (24) ;
b) De 80 à 100 ans, à la table extrapolée graphiquement

Groupe d'âges (années)	Effectif	Groupes d'âges (années)	Effectif	Groupes d'âges (années)	Effectif
0-4	495 349,1	20-24	493 685,7	65-69	420 241,5
5-9	494 875,5	25-29	492 927,0	70-74	371 327,4
10-14	494 593,4	30-34	491 923,2	75-79	296 655,5
15-19	494 239,2	35-39	490 493,1	80-84	201 150,0
		40-44	488 223,6	85-89	137 500,0
		45-49	484 272,1	90-94	50 000,0
		50-54	477 637,6	95-99	12 500,0
		55-59	466 899,9		
		60-64	449 546,8		
0-19	1 979 057,2	20-64	4 335 609,0	65-99	1 489 374,4
Tous âges 7 804 040,6					

Ainsi le capital possédé par les retraités dépasse de 38 % le capital disponible.

De plus, notre calcul est incomplet. On ne peut pas en effet posséder après 65 ans, instantanément, un capital K. Il faut s'y préparer toute sa vie active et en réalité le capital K est constitué graduellement de 20 à 64 ans. Tout capital possédé après 65 ans implique donc la possession d'un capital avant 65 ans. Si l'on ajoute ces capitaux possédés de 20 à 65 ans aux capitaux utilisés après 65 ans pour vivre, on dépasse de bien plus de 38 % le capital disponible.

Le retraité type n° 1 que nous décrivions plus haut n'est donc bien qu'une exception. Il n'y a pas, dans une population, suffisamment de capitaux pour que chacun puisse vivre à la retraite des intérêts de ses économies[3].

Le retraité type n° 2 Il est vrai qu'il existe dans l'imagerie populaire des retraités un autre type que celui que nous venons de décrire. C'est celui qui utilise non seulement les intérêts de ses économies pour vivre à la retraite, mais ses économies elles-mêmes. On dit qu'il «mange» son capital. Le retraité type n° 1 qui vit exclusivement des intérêts de ses économies transmet son capital par héritage à ses descendants tandis que celui qui mange son capital oublie

[3] Il y a bien la possibilité de faire appel à des capitaux étrangers. Mais c'est là une solution qui ne peut pas être généralisée.

sa descendance. Son objectif est de ne plus rien posséder le jour de sa mort. C'est cet oubli de sa descendance que la société condamne en donnant un sens péjoratif à l'expression «manger son capital»; mais, nous venons de le voir, dans le système considéré, ne pas manger son capital n'est pas à la portée de tout le monde et la plupart des retraités y seraient contraints. Il est intéressant de voir de combien il est possible, par ce moyen, d'alléger le capital nécessaire au financement des retraites.

La difficulté pour le retraité individuel est de ne pas se tromper dans ses calculs. Comme il ne connaît pas sa durée de vie à la retraite, il va se garantir en supposant qu'il risque de vivre très vieux, 100 ans par exemple. Nous aurons alors le calcul suivant :

Soit K (65) le capital possédé à 65 ans. Avec cette somme et les intérêts, le retraité retire chaque année une somme S. Quelle doit être la somme K (65) pour que le capital possédé soit nul quand le retraité atteint 100 ans ? A l'âge $65 + x$, le retraité ne possède plus que la somme $K(x)$. Evaluons la variation de cette somme dans l'intervalle x à $x + dx$. Elle augmente des intérêts $K(x)r\ dx$ et diminue du montant de la retraite $S\ dx$. On a donc :

$$dK(x) = K(x)r\ dx - S\ dx,$$

d'où l'équation différentielle :

$$K'(x) = rK(x) - S$$

Pour la résoudre, posons $y = e^{-rx}K(x)$,

d'où $y' = -re^{-rx}\mathrm{K}(x) + e^{-rx}\mathrm{K}'(x) = e^{-rx}\ [K'(x) - rK(x)] = -Se^{-rx}$.

$y' = -Se^{-rx}$ s'intègre immédiatement, on obtient :

$$y = -S \int_0^x e^{-ru} du + R \text{, où } R \text{ est une constante}$$

$$y = +\frac{S}{r}\ [e^{-ru}]_0^x + R = \frac{S}{r}\ [e^{-rx} - 1] + R.$$

Revenons à $K(x)$; on a :

$$e^{-rx} K(x) = \frac{S}{r}\ (e^{-rx} - 1) + R.$$

Pour $x = 35$, on doit avoir $K(x) = 0$, ce qui donne :

$$\frac{S}{r}(e^{-35x} - 1) + R = 0 \text{, d'où la constante } R.$$

Finalement :

$$e^{-rx} K(x) = \frac{S}{r}\ e^{-rx} - \frac{S}{r} - \frac{S}{r}\ e^{-35x} + \frac{S}{r}$$

$$e^{-rx} K(x) = \frac{S}{r}\ e^{-rx} - \frac{S}{r}\ e^{-35x}$$

$$K(x) = \frac{S}{r} - \frac{S}{r} e^{r(x-35)}$$

Telle est la somme que doit posséder chaque retraité d'âge $(65 + x)$ pour que le système fonctionne.

Le tableau 2 montre comment on peut calculer le capital total possédé par les retraités. Les 7 premières colonnes du tableau servent à calculer pour chaque groupe d'âges la quantité $1 - e^{r(x-35)}$. On a adopté un taux d'intérêt de 5 %, donc $r = 0{,}05$. Dans la colonne (8) figurent les effectifs des personnes de 65 ans et plus. Les chiffres sont extraits du tableau 1. La colonne (9) est le produit des colonnes (7) et (8).

Le capital total possédé par les retraités est égal à $1\,013\,583{,}7\frac{S}{r}$ et le rapport entre le capital des retraites et le capital total s'établit à :

$$\frac{1\,013\,583{,}7S}{4\,335\,609{,}0Sr} = 0{,}935 \text{ avec } r = 0{,}05.$$

Le capital possédé par les personnes de 65 ans et plus est moins élevé que dans le cas précédent du retraité type n° 1. En mangeant son capital on aboutit évidemment à une solution qui est moins gourmande en capitaux. Mais ces capitaux sont encore très importants puisqu'ils ne sont inférieurs que de 6,5 % au capital disponible. Si l'on tient compte du fait que tout capital possédé après 65 ans suppose la possession d'un capital avant 65 ans, on est forcé de conclure, comme dans le cas précédent du retraité type n° 1, à l'impossibilité de fonctionnement du système.

TABLEAU 2. – CALCUL DU CAPITAL TOTAL POSSÉDÉ PAR LES RETRAITÉS DANS LE CAS DU RETRAITÉ TYPE N° 2

Groupe d'âges (années) (1)	Age médian (2)	x = (Age) – 65 (3)	$x - 35$ (4)	$r(x - 35)$ (5)	$e^{r(x-35)}$ (6)	$1-e^{r(x-35)}$ (7)	Population (8)	(8) × (7) (9)
65-69	67,5	2,5	–32,5	–1,625	0,19691	0,80309	420 241,5	337 491,7
70-74	72,5	7,5	–27,5	–1,375	0,25284	0,74716	371 327,4	277 441,0
75-79	77,5	12,5	–22,5	–1,125	0,32465	0,67535	296 655,5	200 346,3
80-84	82,5	17,5	–17,5	–0,875	0,41686	0,58314	201 150,0	117 298,6
85-89	87,5	22,5	–12,5	–0,625	0,53526	0,46474	137 500,0	63 901,8
90-94	92,5	27,5	– 7,5	–0,375	0,68729	0,31271	50 000,0	15 635,5
95-100	97,5	32,5	– 2,5	–0,125	0,88250	0,11750	12 500,0	1 468,8
								1 013 583,7

Les retraites collectives par capitalisation

Supposer que toute personne atteignant 65 ans va vivre jusqu'à 100 ans est évidemment très coûteux en capital. Il vient tout de suite à l'esprit de mettre en commun les capitaux possédés par les personnes de 65 ans et plus et c'est alors la vie moyenne à 65 ans qu'il va falloir prendre en compte, soit, dans le cas considéré, 17,1 au lieu des 35 ans séparant 65 ans de 100 ans. C'est le problème que nous avons traité dans l'article cité en référence. Rappelons le principe de notre analyse.

Nous supposons l'existence d'une caisse nationale de retraite unique, recevant de chaque travailleur une cotisation proportionnelle à son salaire. Soit kS. Les sommes ainsi recueillies sont placées sur le marché des capitaux et reçoivent donc un intérêt. Le capital amassé est inscrit au compte de chaque génération. Quand une génération atteint 65 ans, la somme qu'elle possède est utilisée pour payer une retraite S aux survivants et cela jusqu'à l'extinction complète de la génération. La cotisation k est choisie de telle façon que le capital possédé par la génération soit nul quand disparaît le dernier survivant. C'est le système décrit dans le cas du retraité type n° 2, mais cette fois les expériences individuelles sont mises en commun.

Avec ce système il est possible de calculer non seulement le capital possédé par les personnes de 65 ans et plus, mais aussi le capital possédé par les générations qui n'ont pas encore atteint 65 ans. Le capital possédé par les personnes de 65 ans et plus est inférieur à ce qu'il était dans les deux cas précédents, mais on avait alors signalé que les calculs effectués dans ces deux cas ignoraient le capital possédé avant 65 ans. Cette fois il est possible de prendre en compte ce capital, si bien que le résultat final conduit à nouveau à la nécessité de posséder un capital qui dépasse le capital disponible, du moins dans les conditions de faible mortalité et faible fécondité. Nous étions donc arrivés à conclure à l'impossibilité de fonctionnement du système.

La rémunération du capital apparaît donc comme un mauvais moyen pour faire marcher un système de retraite et c'est donc l'autre système, le système par répartition, qui sort vainqueur de cette analyse. On connaît le principe d'un tel système. Il consiste à partager dans l'instant (en pratique dans l'année) la production entre travailleurs et retraités. La caisse de retraite reçoit de chaque travailleur une cotisation proportionnelle à son salaire, hS, et les sommes recueillies dans l'année sont immédiatement versées aux retraités. Dans la population du tableau 1, la cotisation est égale à :

$$h = \frac{\text{Retraités}}{\text{Travailleurs}} = \frac{1\,489\,374{,}4}{4\,395\,609{,}0} = 0{,}344\,.$$

La condamnation du système de capitalisation est-elle vraiment sans appel ? On ne peut s'empêcher de penser qu'en abandonnant le système on se prive d'un moyen qui a des propriétés très utiles. D'abord il divise en deux parties la cotisation à payer par chaque travailleur. Une part directe représentée par le versement à la caisse et une part indirecte payée par l'intermédiaire de la rémunération du capital. Cette part indirecte est relativement indolore pour le travailleur. Elle est incorporée dans les prix des marchandises. Dans la population du tableau 1, il faudra toujours prélever au total 34,4 % du salaire, mais une part seulement sera réellement ressentie comme une cotisation. De plus le système par capitalisation est un puissant moyen de collecter des sommes à investir. La caisse d'un tel système devient en réalité une banque d'investissement qui n'a pas besoin de chercher des épargnants. Ceux-ci lui sont en quelque sorte donnés par la loi. N'y aurait-il pas place pour un système de retraite qui fonctionnerait à la fois en capitalisation et en répartition ? C'est ce que nous voudrions examiner maintenant.

Nous allons reprendre le modèle utilisé dans l'article cité en référence et que nous avons décrit plus haut, et nous allons suivre à partir de son début l'instauration d'un système de retraite collective par capitalisation. Nous verrons s'accroître le capital possédé par la caisse, et pendant un certain temps cet accroissement ne posera pas de difficultés. A un moment donné nous constaterons que le capital possédé par la caisse atteint le capital national et c'est là que les difficultés commenceront[4]. Nous les ignorerons, en supposant par exemple que la caisse fait appel à des capitaux étrangers. Cela nous permettra de pousser le calcul jusqu'à ses ultimes conclusions.

Le compte d'une génération Nous commencerons par rappeler les formules donnant le compte d'une génération en fonction de son âge.

Considérons donc une génération d'âge x, compris entre 20 et 65 ans. Une somme $s(x)$ est inscrite à son compte. Soit $p(x)$ la fonction de survie. De x à $x + dx$ les $p(x)$ survivants de la génération versent leur cotisation $kS\,p(x)dx$. De plus la caisse qui a investi la somme $s(x)$ reçoit un intérêt $r\,s(x)dx$. La variation de $s(x)$ de x à $x + dx$ est donc égale à :

$$d\,s(x) = kS\;p(x)dx + r\;s(x)dx,$$

ce qui s'écrit :

$$s'(x) = r\,s(x) + kS\;p(x).$$

C'est une équation différentielle du même type que celle que la considération du retraité type n° 2 nous avait amené à écrire. On la résout en posant $y = e^{-rx}\,s(x)$ et on obtient finalement :

$$s(x) = kS\,e^{rx}\int_{20}^{x} e^{-ru}p(u)du\,. \tag{1}$$

Cette formule est valable pour x variant de 20 à 65 ans.

Après 65 ans, la situation est différente. Il n'y a plus de cotisation mais au contraire le paiement d'une retraite. De x à $x + dx$ le capital possédé par les survivants s'accroît toujours des intérêts $s(x)r\,dx$ et il diminue de $S\,p(x)dx$. On a donc :

$$d\,s(x) = s(x)r\;dx - S\;p(x)dx.$$

[4] En fait, dans la réalité les difficultés commenceront bien avant le moment où la caisse de retraite possède tout le capital. Il suffit qu'une fraction importante du capital national soit possédée par la caisse. On ne voit pas en effet comment une telle fraction pourrait être concentrée dans une seule caisse. Ce n'est guère compatible avec le fonctionnement du système capitaliste.

TABLEAU 3. – CALCUL DE $I(x) = e^{rx} \int_{20}^{x} e^{-ru} p(u)\, du$ DE 20 À 65 ANS ET $I(x) = e^{rx} \int_{20}^{65} e^{-ru} p(u)\, du$ DE 65 À 100 ANS

Groupe d'âges (a), $(a+5)$ (1)	$\int_a^{a+5} p(u)\, du$ (2)	Age médian $(\bar{u})$ (3)	$e^{-r\bar{u}}$ (4)	$e^{-r\bar{u}} \int_a^{a+5} p(u)\, du = \int_a^{a+5} e^{-ru} p(u)\, du$ (5)	$\int_{20}^{x} e^{-ru} p(u)\, du$ (6)	x (7)	e^{rx} avec $r = 0{,}05$ (8)	$I(x)$ (9)
20-24	493 685,7	22,5	0,32465	160 276,3	160 276,3	25	3,49034	559 419,2
25-29	492 927,0	27,5	0,25284	124 631,5	284 907,8	30	4,48169	1 276 868,1
30-34	491 923,2	32,5	0,19691	96 865,4	381 773,2	35	5,75460	2 196 953,1
35-39	490 493,1	37,5	0,15335	75 219,5	456 992,7	40	7,38906	3 376 744,7
40-44	488 223,6	42,5	0,11943	58 310,0	515 302,7	45	9,48774	4 889 055,9
45-49	484 272,1	47,5	0,09361	45 044,3	560 347,0	50	12,18249	6 826 423,9
50-54	477 637,6	52,5	0,07244	34 600,0	594 947,0	55	15,64263	9 306 536,9
55-59	466 899,9	57,5	0,05642	26 430,7	621 287,7	60	20,08554	12 478 897,0
60-64	449 546,8	62,5	0,04394	19 751,7	641 039,4	65	25,79034	16 532 624,0
65-69					641 039,4	70	33,11545	21 228 309,5
70-74					641 039,4	75	42,52108	27 257 688,9
75-79					641 039,4	80	54,59815	34 999 565,3
80-84					641 039,4	85	70,10541	44 940 331,5
85-89					641 039,4	90	90,01713	57 704 527,8
90-94					641 039,4	95	115,58428	74 094 080,4
95-99					641 039,4	100	148,41316	95 138 682,5

colonne (2) : intégrale de la fonction de survie dans chaque groupe d'âges, pour 100 000 naissances (nombres identiques à ceux du tableau 1).
colonne (3) : âge médian $\bar{u}$ de chaque groupe d'âges.
colonne (5) : produit de la colonne (2) par la colonne (4). C'est une approximation pour $\int_a^{a+5} e^{-ru} p(u)\, du$.
colonne (6) : c'est la colonne (5) cumulée par le haut. C'est donc l'intégrale $\int_{20}^{x} e^{-ru} p(u)\, du$ où x est indiqué dans la colonne (7).
colonne (7) : x est la fin de chaque groupe d'âges.
colonne (9) : c'est le produit de la colonne (6) et de la colonne (8).

Nota : Au-delà de 65 ans, on voit apparaître dans la colonne (6) un nombre constant égal à $\int_{20}^{65} e^{-ru} p(u)\, du$.

D'où l'équation différentielle :

$s'(x) = r\ s(x) - S\ p(x).$

Pour la résoudre, on pose toujours $y = e^{-rx}\ s(x)$ et on trouve finalement :

$$s(x) = -Se^{rx}\int_{65}^{x} e^{-ru}p(u)du + k\,Se^{rx}\int_{20}^{65} e^{-ru}\,p(u)du\,. \tag{2}$$

Cette formule est valable pour x variant au-dessus de 65 ans.

Nous allons calculer les intégrales :

$$I(x) = e^{rx}\int_{20}^{x} e^{ru}\,p(u)du \text{ et } K(x) = e^{rx}\int_{65}^{x} e^{-ru}\,p(u)du$$

dans les conditions de mortalité du tableau 1.

Le tableau 3 donne le calcul de $I(x)$ et le tableau 4 le calcul de $K(x)$. La signification des diverses colonnes est indiquée en note dans les tableaux.

TABLEAU 4. – CALCUL DE $K(x) = e^{rx}\int_{65}^{x} e^{-ru}\,p(u)\,du$

Groupe d'âges (a), (a + 5) (1)	$\int_a^{a+5} p(u)\,du$ (2)	Age médian ($\bar{u}$) (3)	$e^{-r\bar{u}}$ (4)	$e^{-r\bar{u}}\int_a^{a+5} p(u)\,du = \int_a^{a+5} e^{-ru}p(u)\,du$ (5)
65-69	420 241,5	67,5	0,03422	14 379,9
70-74	371 327,4	72,5	0,02665	9 895,5
75-79	296 655,5	77,5	0,02075	6 156,9
80-84	201 150,0	82,5	0,01616	3 251,3
85-89	137 500,0	87,5	0,01259	1 730,9
90-94	50 000,0	92,5	0,00980	490,2
95-99	12 500,0	97,5	0,00764	95,4
Groupe d'âges (a), (a + 5) (1)	**$\int_{65}^{x} e^{-ru}p(u)\,du$ (6)**	**x (7)**	**e^{rx} (8)**	**$K(x)$ (9)**
65-69	14 379,9	70	33,11545	476 196,9
70-74	24 275,4	75	42,52108	1 032 216,3
75-79	30 432,3	80	54,59815	1 661 547,3
80-84	33 683,6	85	70,10541	2 361 402,7
85-89	35 414,5	90	90,01713	3 187 911,7
90-94	35 904,7	95	115,58428	4 150 019,1
95-99	36 000,1	100	148,41316	5 342 888,6

Mêmes indications que dans le tableau 3.

Les 45 premières années d'un système de retraites collectives par capitalisation

Imaginons donc maintenant qu'une nation décide d'établir à partir d'un instant zéro un système de retraites collectives par capitalisation. A l'instant zéro les personnes qui atteignent 20 ans commencent à cotiser. L'année suivante une nouvelle génération entre dans la caisse et 5 ans plus tard il y a 5 générations qui cotisent. La caisse possède alors un capital égal à $kS\int_{20}^{25} I(x)dx = C(5)$; 5 ans plus tard le capital possédé par la caisse est $C(10) = kS\int_{20}^{30} I(x)dx$ et ainsi de suite jusqu'à 45 ans après le point de départ. A ce moment-là, la caisse possède $C\ (45) = kS\int_{20}^{65} I(x)dx.$

45 ans après le point de départ la caisse commence à payer une retraite à ceux qui ont commencé à cotiser 45 ans plus tôt. Nous verrons dans un instant les effets produits par le paiement de cette retraite sur le capital total possédé par la caisse. Nous allons nous arrêter un moment sur les 45 premières années du système.

Nous allons calculer l'intégrale $J(x) = \int_{20}^{x} I(x)dx$. Nous lui donnerons le nom de «coefficient de capital». Il suffit en effet de multiplier $J(x)$ par kS pour avoir le capital possédé $(x - 20)$ ans après le début du système. D'où son nom. Le tableau 5 donne le détail du calcul de $J(x)$. Dans ce tableau nous ignorons pour l'instant les chiffres situés au-dessus de 65 ans. Plaçons-nous à une certaine durée après le point de départ du système. Par exemple 20 ans après le départ. Le capital total possédé par la caisse est égal à $J(40)kS$, soit 28 608 063,8 kS. La rémunération annuelle de ce capital est 28 608 063,8 kSr = 1 430 403,2 kS.

Passage de la capitalisation à la répartition

Imaginons que la caisse décide à ce moment d'abandonner le système de capitalisation et qu'elle passe en répartition. Elle annonce que dorénavant *tous* les travailleurs vont cotiser et non plus seulement les 20 générations qui ont atteint 20 ans dans les 20 dernières années. En contrepartie une retraite S sera immédiatement versée à chaque personne de 65 ans et plus. Pour éviter tout changement brusque, la caisse a évidemment intérêt à conserver en répartition la même cotisation kS qu'elle avait adoptée en capitalisation. On a alors le calcul suivant :

Les 4 335 609,0 travailleurs vont verser dans l'année à la caisse une somme égale à 4 335 609,0 kS. De plus, la caisse reçoit une rémunération de son capital égale à 1 430 403,2 kS. En tout, la caisse reçoit 5 766 012,2 kS et avec cette somme elle doit payer une retraite S à chacune des 1 489 374,4 personnes de 65 ans et plus. Les dépenses totales sont

TABLEAU 5. – CALCUL DU COEFFICIENT DE CAPITAL $J(x) = \int_{20}^{x} I(x)\,dx$ ET DU COEFFICIENT DE RÉMUNÉRATION DU CAPITAL $rJ(x)$ AVEC $r = 0{,}05$

Groupe d'âges $(a), (a+5)$ (1)	$\int_a^{a+5} I(x)\,dx$ (2)	Coefficient de Capital : $J(x)$ (3)	Coefficient de rémunération de Capital : $rJ(x)$ $r = 0{,}05$ (4)	x (5)
20-24	1 398 548,0	1 398 548,0	69 927,4	25
25-29	4 590 718,3	5 989 266,3	299 463,3	30
30-34	8 684 553,0	14 673 819,3	733 691,0	35
35-39	13 934 244,5	28 608 063,8	1 430 403,2	40
40-44	20 664 501,5	49 272 565,3	2 463 628,3	45
45-49	29 288 699,5	78 561 264,8	3 928 063,2	50
50-54	40 332 402,0	118 893 666,8	5 944 683,3	55
55-59	54 463 584,7	173 357 251,5	8 667 862,5	60
60-64	74 528 802,5	245 886 054,0	12 294 302,7	65
65-69	94 402 333,8	340 288 387,8	17 014 419,4	70
70-74	121 214 996,0	461 503 383,8	23 075 169,8	75
75-79	155 643 135,5	617 146 519,3	30 857 326,0	80
80-84	199 849 742,0	816 996 261,3	40 849 813,1	85
85-89	256 612 148,3	1 073 608 409,6	53 680 420,5	90
90-94	329 496 520,5	1 403 104 930,1	70 155 246,5	95
95-99	423 081 907,2	1 826 186 837,3	91 309 341,9	100

colonne (2) : Intégrale de $I(x)$ dans chaque groupe d'âges. Exemples : Pour le groupe 20-24 ans on a :

$$\int_{20}^{25} I(x)\,dx = \frac{0 + 559\,419{,}2}{2} \times 5 = 1\,398\,548{,}0$$

Pour le groupe d'âges 35-39 ans on a :

$$\int_{35}^{40} = \frac{2\,196\,953{,}1 + 3\,376\,744{,}7}{2} \times 5 = 13\,934\,244{,}5$$

colonne (3) : colonne (2) cumulée par le haut
colonne (4) : produit de la colonne (3) par r = 0,05
colonne (5) : fin de chaque groupe d'âges

donc égales à 1 489 374,4 S. En égalisant les recettes et les dépenses, on trouve :

$$k = \frac{1\,489\,374{,}4}{5\,766\,012{,}2} = 0{,}2583.$$

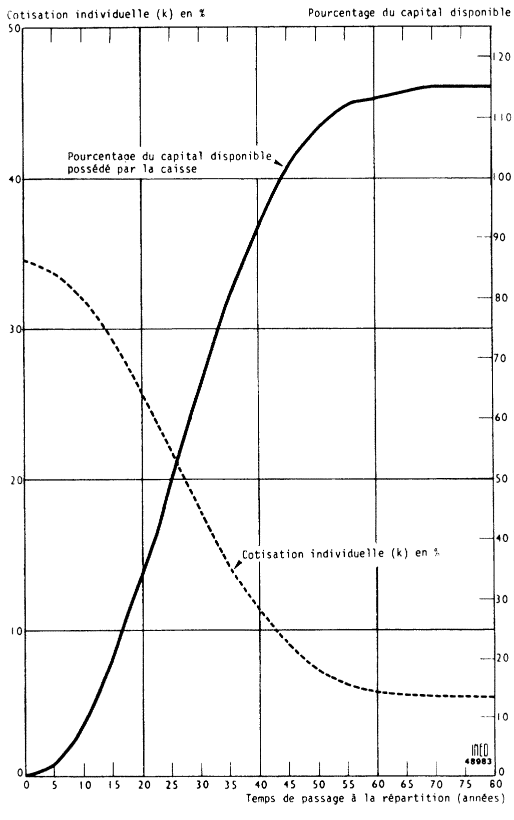
Si la caisse avait décidé dès le départ de fonctionner en répartition, nous avons vu plus haut qu'elle aurait dû demander une cotisation égale à 0,344. En différant de 20 ans le passage à la répartition, donc en capitalisant pendant 20 ans, elle peut 20 ans après le point de départ servir la même retraite en ne demandant qu'une cotisation égale à 0,2583. Le prix payé a été que pendant 20 ans aucune retraite n'a été servie.

Une fois déterminée la cotisation kS on peut calculer le capital total possédé par la caisse. Dans le cas considéré, il était égal à

28 608 063,7 × 0,2583 = 7 389 462,9. Il représente donc une fraction du capital total disponible égale à :

$$\frac{7\,389\,462{,}9\,S}{21\,678\,095\,S} = 0{,}341.$$

Le calcul que nous venons de faire 20 ans après le point de départ peut se répéter à diverses durées. Les tableaux 7 et 8 donnent ces divers calculs, qui sont illustrés par le graphique 1. Il y a deux courbes sur ce graphique, la courbe de la cotisation individuelle (k) et le pourcentage du capital disponible possédé par la caisse. Rappelons que pour l'instant nous nous limitons aux 45 premières années du système. La partie du graphique à droite de l'abscisse 45 ans n'est pas à considérer. La courbe de la cotisation individuelle part à l'instant zéro de la cotisation en répartition pure (34,4 %). Puis elle diminue au fur et à mesure qu'on ajourne la répartition et 45 ans après le point de départ elle n'est plus que de 9 %.



Graphique 1. – Cotisation individuelle et pourcentage du capital disponible possédé par la caisse en fonction du temps de passage à la répartition.

La fraction du capital disponible possédé par la caisse suit une évolution inverse. Elle est nulle au départ et s'accroît avec la durée du passage à la répartition. A 43 ans elle atteint 100 % : tout le capital disponible est possédé par la caisse et le système ne peut plus fonctionner sans faire appel à des capitaux étrangers.

TABLEAU 6. – CALCUL DU COEFFICIENT NÉGATIF DE CAPITAL APRÈS 65 ANS $H(x) = \int_{65}^{x} K(x)\,dx$ ET DU COEFFICIENT DE RÉMUNÉRATION NÉGATIF DE CAPITAL $rH(x)$uyt

Groupe d'âges (a) (a + 5) (1)	$\int_{a}^{a+5} K(x)\,dx$ (2)	Coefficient négatif de capital $H(x)$ (3)	Coefficient négatif de rémunération de capital $rH(x)$ (4)	x (5)
65-69	1 190 492,25	1 190 492,25	59 524,6	70
70-74	3 771 033,00	4 961 525,25	248 076,2	75
75-79	6 734 409,00	11 695 934,25	584 796,7	80
80-84	10 057 375,00	21 753 309,25	1 087 665,5	85
85-89	13 873 286,00	35 626 595,25	1 781 329,8	90
90-94	18 344 822,00	53 971 422,25	2 698 571,1	95
95-99	23 732 269,25	77 703 691,50	3 885 184,6	100

Mêmes indications que dans le tableau 5.

Le système au-delà des 45 premières années

Voyons maintenant ce qui se passe si la caisse ne décide pas de passer à la répartition avant 45 ans. Pour calculer le capital possédé par la caisse, il faut alors appliquer la formule (2) au lieu de la formule (1). Dans cette formule (2) il y a un terme positif et un terme négatif.

Le terme positif est de même nature que l'intégrale $I(x)$:

de 0 à 65 ans on a $I(x) = e^{rx} \int_{20}^{x} e^{-ru} p(u)\,du.$

Après 65 ans, on posera que $I(x)$ est identique au terme positif de la formule (2). On a donc :

Après 65 ans $I(x) = e^{rx} \int_{20}^{65} e^{-ru} p(u)\,du.$

C'est de cette façon qu'on a complété après 65 ans les tableaux 3 et 5.

Le terme négatif est l'intégrale $K(x)$ du tableau 4.

Plaçons-nous plus de 45 ans après le point de départ, par exemple à 55 ans. Le capital possédé par la caisse est alors égal à :

$$C(55) = kS \int_{20}^{75} I(x)dx - S \int_{65}^{75} K(x)dx.$$

Nous voyons apparaître l'intégrale $\int_{65}^{x} K(x)dx$, à laquelle nous donnerons le nom de «coefficient négatif du capital». Son calcul est donné dans le tableau 6 : à l'aide des tableaux 5 et 6, on peut alors calculer $C(55)$.

On a :

$$C(55) = \underset{\substack{\text{tableau 5} \\ \text{colonne (3)}}}{\underset{\uparrow}{kS\,461\,503\,383{,}8}} - \underset{\substack{\text{tableau 6} \\ \text{colonne (3)}}}{\underset{\uparrow}{S\,4\,961\,525{,}2}}.$$

Imaginons que la caisse décide à ce moment de passer en répartition.

Elle a alors comme recettes :

l'intérêt du capital $rC(55)$, auquel s'ajoutent les cotisations de tous les travailleurs : 4 335 609,0 kS.

Elle a comme dépenses :

les retraites versées : 1 489 374,4 S.

On a alors le calcul suivant :

$$kS\ 461\,503\,383{,}8 \times 0{,}05 - S\,4\,961\,525{,}2 \times 0{,}05 + kS\,4\,335\,609{,}0 = 1\,489\,374{,}4\ S.$$

D'où l'on tire :

$$k = 0{,}0634.$$

Le tableau 7, dans sa partie inférieure, après 65 ans, donne le même calcul pour divers temps de passage à la répartition. On est allé jusqu'à 80 ans après le point de départ. Les personnes qui ont commencé à cotiser à 20 ans à l'instant zéro ont alors atteint 100 ans. On peut admettre que le système collectif par capitalisation est alors complètement instauré. Tout le monde cotise et tout le monde reçoit une retraite. Il devient alors indifférent de continuer la capitalisation ou de passer en répartition. Le résultat est le même.

Connaissant la cotisation k on peut, comme avant 65 ans, calculer le capital possédé par la caisse. C'est l'objet de la partie inférieure du tableau 8. On peut alors compléter le graphique 1 après 65 ans.

Le passage à la répartition 80 ans après le point de départ et le système collectif par capitalisation en vitesse de croisière

Considérons un système de retraites collectives par capitalisation dans lequel la cotisation kS est déterminée de telle façon que le capital possédé par le dernier survivant de chaque génération soit nul. Plaçons-nous dans une population stationnaire et supposons que le système marche à plein. Le capital total possédé par la caisse demeure lui aussi stationnaire. Les retraites sont payées en prélevant sur le capital possédé par les personnes à la retraite. Les cotisations payées par les travailleurs et la ré-

TABLEAU 7. – CALCUL DE LA COTISATION INDIVIDUELLE (k) SUIVANT LE TEMPS DE PASSAGE À LA RÉPARTITION

Groupe d'âges (1)	Temps de passage à la répartition (années) (2)	Intérêt (3)	Cotisations totales (4)	Recette totale (5)	Retraite (charges) (6)			k (%) (9)
20-24	5	69 927,4kS	4 335 609,0kS	4 405 536,4kS	1 489 374,5S			33,81
25-29	10	299 463,3kS	4 335 609,0kS	4 635 072,3kS	1 489 374,5S			32,13
30-34	15	733 691,0kS	4 335 609,0kS	5 069 300,0kS	1 489 374,5S			29,38
35-39	20	1 430 403,2kS	4 335 609,0kS	5 766 012,2kS	1 489 374,5S			25,83
40-44	25	2 463 628,3kS	4 335 609,0kS	6 799 237,3kS	1 489 374,5S			21,91
45-49	30	3 928 063,2kS	4 335 609,0kS	8 263 672,2kS	1 489 374,5S			18,02
50-54	35	5 944 683,3kS	4 335 609,0kS	10 280 292,3kS	1 489 374,5S			14,49
55-59	40	8 667 862,5kS	4 335 609,0kS	13 003 471,5kS	1 489 374,5S			11,45
60-64	45	12 294 302,7kS	4 335 609,0kS	16 629 911,7kS	1 489 374,5S			8,96
						Décapitalisation (7)	Charges totales (8)	k (%) (9 bis)
65-69	50	17 014 419,4kS	4 335 609,0kS	21 350 028,4kS	1 489 374,5S	59 524,6S	1 548 899,1S	7,25
70-74	55	23 075 169,2kS	4 335 609,0kS	27 410 778,2kS	1 489 374,5S	248 076,2S	1 737 450,7S	6,34
75-79	60	30 857 326,0kS	4 335 609,0kS	35 192 935,0kS	1 489 374,5S	584 796,7S	2 074 171,2S	5,89
80-84	65	40 849 813,1kS	4 335 609,0kS	45 185 422,1kS	1 489 374,5S	1 087 665,5S	2 577 040,0S	5,70
85-89	70	53 680 420,5kS	4 335 609,0kS	58 016 029,5kS	1 489 374,5S	1 781 329,8S	3 270 704,3S	5,64
90-94	75	70 155 246,5kS	4 335 609,0kS	74 490 855,5kS	1 489 374,5S	2 698 571,1S	4 187 945,6S	5,62
95-99	80	91 309 341,9kS	4 335 609,0kS	95 644 950,9kS	1 489 374,5S	3 885 184,6S	5 374 559,1S	5,62

colonne (3) : coefficients de rémunération du capital (chiffres de la colonne (4) du tableau 5 multipliés par kS)
colonne (4) : nombre des personnes de 20 à 64 ans multiplié par kS
colonne (5) : colonne (3) + colonne (4)
colonne (6) : nombre des personnes de 65 ans et plus multiplié par S
colonne (9) : colonne (6) divisée par la colonne (5)
colonne (7) au-delà de 65 ans : coefficient négatif de rémunération du capital (chiffre de la colonne (4) du tableau 6 multiplié par S)
colonne (8) : colonne (6) + colonne (7)
colonne (9 bis) : colonne (8) divisée par la colonne 5.

TABLEAU 8. – CALCUL DU CAPITAL POSSÉDÉ PAR LA CAISSE AU MOMENT DU PASSAGE À LA RÉPARTITION

Groupe d'âges (1)	Coefficient de Capital : $J(x)$ (2)	Cotisation individuelle (k) (3)	Capital possédé par la caisse (en salaire S) (4)	(5)	(6)	Capital disponible (en salaire S) (7)	Pourcentage du capital possédé par la caisse (8)	Temps de passage à la répartition (années) (9)
20-24	1 318 548,0	33,81	472 849,0			21 678 095	2,2	5
25-29	5 989 266,3	32,13	1 924 351,3			21 678 095	8,9	10
30-34	14 673 819,3	29,38	4 311 168,1			21 678 095	19,9	15
35-39	28 608 063,8	25,83	7 389 462,9			21 678 095	34,1	20
40-44	49 272 565,3	21,91	10 795 619,1			21 678 095	49,8	25
45-49	78 561 264,8	18,02	14 156 739,9			21 678 095	65,3	30
50-54	118 893 666,8	14,49	17 227 692,3			21 678 095	79,5	35
55-59	173 357 251,5	11,45	19 849 405,3			21 678 095	91,6	40
60-64	245 886 054,0	8,96	22 031 390,4			21 678 095	101,6	45
65-69	340 288 387,8	7,25	24 670 908,1	1 190 492,3	23 480 415,8	21 678 095	108,3	50
70-74	461 503 383,8	6,34	29 259 314,5	4 961 525,2	24 297 789,3	21 678 095	112,1	55
75-79	617 146 519,3	5,89	36 349 930,0	11 695 934,3	24 653 995,7	21 678 095	113,7	60
80-84	816 996 261,3	5,70	46 568 786,9	21 753 309,2	24 815 477,7	21 678 095	114,5	65
85-89	1 073 608 409,6	5,64	60 551 514,3	35 626 595,3	24 924 919,0	21 678 095	115,0	70
90-94	1 403 104 930,1	5,62	78 854 497,1	53 971 422,2	24 883 079,9	21 678 095	114,8	75
95-99	1 826 186 837,3	5,62	102 631 700,2	77 703 691,5	24 928 008,7	21 678 095	115,0	80

colonne (2) : coefficient de capital $J(x)$ de la colonne (3) du tableau 5
colonne (3) : cotisation individuelle (k) des colonnes (9) du tableau 7
colonne (4) : colonne (2) multipliée par la colonne (3)
colonne (5) : coefficient négatif de capital $H(x)$ de la colonne (3) du tableau 6
colonne (6) : colonne (4) – colonne (5)
colonne (7) : nombre des personnes de 20 à 64 ans multipliés par 5 (le capital disponible est supposé égal à 5 fois le revenu total)
colonne (8) : colonne (4) avant 65 ans et colonne (6) après 65 ans divisées par la colonne (7).

munération du capital servent à reconstituer les prélèvements sur le capital utilisés pour payer les retraites.

Examinons maintenant le cas où l'on passe en répartition à une durée telle que tous les travailleurs cotisent et que tous les retraités reçoivent une retraite (pratiquement 80 ans après le point de départ) ; on est aussi dans une situation où le capital reste invariable : c'est le capital accumulé pendant les 80 années précédentes. Il ne s'accroît plus puisqu'on cesse de capitaliser. Les cotisations des travailleurs et la rémunération du capital servent à payer les retraites.

Qu'on prélève sur le capital pour payer les retraites et qu'on utilise les recettes pour le reconstituer, ou qu'on ne prélève pas sur le capital mais qu'on utilise les recettes pour payer les retraites revient exactement au même. Autrement dit, passer à la répartition au bout de 80 ans ou fonctionner en capitalisation de groupe de telle façon que le capital possédé par chaque génération soit nul quand le dernier survivant disparaît sont deux systèmes équivalents.

Sur le graphique 1, le point A correspond à la répartition pure dès l'instant zéro ; le point B correspond à la capitalisation collective pure. Dans l'article précédent, cité en référence, nous avons discuté en détail les diverses positions des points (A) et (B) quand variaient les conditions démographiques et le taux d'intérêt. Nous voyons bien maintenant qu'il existe des situations intermédiaires.

Conclusion

Ces situations intermédiaires pourraient être étudiées comme l'ont été les situations extrêmes dans l'article cité en référence. Il faudrait reprendre les mêmes calculs à partir d'autres tables de mortalité et d'autres taux d'intérêt pour voir comment les résultats auxquels nous sommes parvenus sont influencés par des changements dans les conditions de mortalité et dans la rémunération du capital. Il faudrait aussi ne pas se borner à des populations stationnaires et considérer des populations stables de divers taux d'accroissement : dans ce cas le capital possédé par la caisse devra s'accroître au même taux que la population. Quand la décision de passer en répartition sera prise, il faudra donc continuer d'utiliser une fraction des cotisations pour accroître le capital. Une telle étude ne pose pas de difficultés. Ce n'est qu'une question de calculs analogues à ceux qui précèdent et les séries de populations stables de Coale et Demeny donnent tous les éléments pour exécuter ces calculs.

Plus inquiétant est sans doute l'adéquation du modèle utilisé à la réalité. En supposant indéfiniment le même salaire pour tous, on ignore le progrès technique. Or, en réalité le salaire réel, à prix constant, augmente sous l'effet de ce progrès et les cotisations versées à 20 ans ne sont pas les mêmes que celles versées à 40 ans qui diffèrent elles-mêmes de celles versées à 60 ans. Cela veut dire que le capital possédé par une génération à un âge donné est une moyenne hétérogène de capitaux accumulés à diverses époques et par conséquent de valeurs diverses.

Il faut aussi tenir compte du fait que le capital n'est pas éternel. Il faut l'amortir et le remplacer.

Enfin, il y a le redoutable effet de l'inflation qui dans le passé a détérioré les systèmes par capitalisation au point que la plupart ont fait faillite.

Nous voudrions conclure, toutefois, sur une note optimiste. Pour un pays qui ne possède pas de système de retraite, démarrer en capitalisation pendant, par exemple, une vingtaine d'années et passer ensuite à la répartition est une solution séduisante. Nous pensons que notre modèle, quelque rudimentaire qu'il soit, montre qu'une telle solution peut être adoptée sans difficultés majeures. Dans la réalité, les durées, les cotisations et les capitaux seront sans doute différents des valeurs tirées du modèle. Mais, les ordres de grandeurs seront conservés.

Jean BOURGEOIS-PICHAT